SF1624 Algebra och geometri

Sjunde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

9 november, 2009

Vektorer i $\mathbb{R}^n$

Vi kan generalisera mycket av det vi gjort i planet –$\mathbb{R}^2$ – och i rummet – $\mathbb{R}^3$ – till rum med flera koordinater.

Definition (Vektorer i $\mathbb{R}^n$)

Om n är ett positivt heltal är en vektor i $\mathbb{R}^n$ en lista av koordinater, eller ordnad n-tippel av reella tal,

$$\overline{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad x_i \in \mathbb{R},\ \text{för } i = 1, 2, \dot{;} n.$$

Addition och multiplikation med skalär

Precis som för vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ har vi allmänt:

Definition (Addition och multiplikation med skalär)

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$ (addition)
- $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$ (mult. med skalär)

Vi säger att addition och multiplikation med skalär sker komponentvis.

Räknelagar

Precis som tidigare uppfyller de samma naturliga räknelagar som vi är vana vid, dvs :

- $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$, $\quad \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$,
- $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}$, $\quad \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$.
- $\overline{u} + 0 = \overline{u}$, $\quad \overline{u} \in \mathbb{R}^n$.
- Det finns $-\overline{u}$ så att $\overline{u} + (-\overline{u}) = 0$, $\quad \overline{u} \in \mathbb{R}^n$.
- $a(\overline{u} + \overline{v}) = (a\overline{u}) + (a\overline{v})$, $\quad \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a + b)\overline{u} = (a\overline{u}) + (b\overline{u})$, $\quad \overline{u} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- $(ab)\overline{u} = a(b\overline{u})$, $\quad \overline{u} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$,
- $1\overline{u} = \overline{u}$, $\quad \overline{u} \in \mathbb{R}^n$.

Skalärprodukt

En annan sak som också går att generalisera är skalärprodukten.

Definition (Skalärprodukt)

Om $\overline{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $\overline{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ är deras skalärprodukt

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

dvs summan av produkterna av deras koordinater.

Längd

Vi kan nu prata om längden av en vektor i $\mathbb{R}^n$ genom:

Definition (längd)

Längden, $|\overline{u}|$, av en vektor $\overline{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ges av

$$|\overline{u}|^2 = \overline{u} \cdot \overline{u} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

och

$$|\overline{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}.$$

Ortogonalitet och vinklar

Vi kan säga att två vektorer, $\overline{u}$ och $\overline{v}$ är ortogonala om $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$.
På grund av

Sats (Cauchy-Schwartz olikhet)

För $\overline{u}$ och $\overline{v}$ i $\mathbb{R}^n$ gäller att

$$|\overline{u} \cdot \overline{v}| \leq |\overline{u}| \cdot |\overline{v}|$$

med likhet om och endast om $\overline{u} || \overline{v}$, dvs $\overline{u} = a\overline{v}$ eller $\overline{v} = a\overline{u}$.

kan vi också tala om vinklar mellan vektorer genom att definiera vinkeln θ mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$ genom

$$\cos\theta = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|}.$$

Linjärkombinationer

Om vi har ett antal vektorer $u_1, u_2, \ldots, u_m$ i $\mathbb{R}^n$ kan vi bilda linjärkombinationer av dem genom

$$a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + \cdots + a_n\overline{u}_n$$

där koefficienterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är skalärer.
Vi får en linje genom origo i $\mathbb{R}^n$ genom att se på alla linjärkombinationer av en given vektor $\overline{u}$, dvs

$$a\overline{u}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

och vi får ett plan genom origo i $\mathbb{R}^n$ genom att se på alla linjärkombinationer av två icke-parallella vektorer $\overline{u}$ och $\overline{v}$, dvs

$$a\overline{u} + b\overline{v}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Matriser

Vi kan bygga upp tvådimensionella uppställningar av tal, matriser, som

Definition ($m \times n$-matris)

Om m och n är positiva heltal är en $m \times n$-matris en uppställning av tal

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Vi kallar $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\begin{pmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ för raderna i A.

Kolonner

Vektorerna

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

kallas kolonnerna i A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matrismultiplikation

Vi kan nu definiera en multiplkation av två matriser A och B om antalet kolonner i A är lika med antalet rader i B.

$$AB = C$$

där

$$c_{i,j} = \text{skalärprodukten av rad } i \text{ från } A \text{ med kolonn } j \text{ från } B.$$

dvs

$$c_{i,j} = \sum a_{i,k} b_{k,j}.$$